№ 7-дәріс.

Тақырыбы: Сызықтық дифференциалдық теңдеулер. Бернулли теңдеуі. Толық дифференциалдар теңдеуі.

Бірінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер.

Анықтама 1. Егер дифференциал теңдеу ізделінді функция мен оның туындысы бойынша сызықты болса, ондай теңдеуді сызықты дифференциал теңдеу деп атаймыз.

Бірінші ретті сызықты дифференциал теңдеуді мына түрде жазуға болады:

$$y' + P(x)y = Q(x) \qquad (1)$$

$$y' + P(x)y = 0, \qquad (2)$$

(1) – біртектес емес, ал (2) – біртектес дифференциал теңдеу деп аталады.
Біртектес дифференциал теңдеудің жалпы шешімін табалық:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)dx = 0 \Rightarrow \ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C| \Rightarrow$$

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} \qquad (3)$$

Лагранж әдісін (тұрақты шаманы вариациалау әдісі) қолданып, (1) теңдеуінің шешімін алуға болады. Шешімді (3) түрінде іздейміз, мұндағы $C = C(x)$ - белгісіз функция. Онда (1) теңдеуіндегі y'-тың орнына:

$$y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx},$$

ал y - тің орнына (5)-ті қойсақ:

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \Rightarrow$$

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \Rightarrow C'(x) = Q(x)\cdot e^{-\int P(x)dx} \Rightarrow C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1$$

Осы табылған $C(x)$-ті (5)-ке қоя отырып, (1) теңдеуінің жалпы шешімін аламыз.

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(C_1 + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right) \qquad (4)$$

Ескерту 5. $C_1e^{-\int P(x)dx}$ - (4) теңдеуінің жалпы шешімі, ал $e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$ - (1) теңдеуінің дербес шешімі ($C_1 = 0$ болғанда) болғандықтан, кез келген ретті сызықтық теңдеу үшін ақиқат болатын мынадай тұжырым жасауға болады: біртектес емес сызықты теңдеудің жалпы шешімі оған сәйкес біртекті сызықтық теңдеудің жалпы шешімі мен біртексіз сызықты теңдеудің дербес шешімінің қосындысына тең ($C_1 = 0$ болғандағы).

Мысал 1. $(x^2 - x)y' + y = x^2(2x-1)$ теңдеуінің жалпы шешімін тап. Бастапқы шарт *y(-2)=2* болғандағы, Коши есебін шеш.

►Берілген теңдеуді екі жағын да $x^2 - x \neq 0$ өрнегіне бөліп, мына түрге келтіреміз:

$$y + \frac{y}{x^2 - x} = \frac{x^2(2x-1)}{x^2 - x}.$$

Мұнда

$$P(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)},. \qquad Q(x) = \frac{x^2(2x-1)}{x(x-1)}. = \frac{x(2x-1)}{x-1}.$$

Берілген теңдеудің (6) формуласына сәйкес жалпы шешімі:

$$y = e^{-\int\frac{dx}{x(x-1)}}\left(\int\frac{x(2x-1)}{x-1}e^{\int\frac{dx}{x(x-1)}}dx + c\right). \qquad (5)$$

Осы шешімнің ішіндегі интегралдарды шығаралық:

$$\int\left(\frac{dx}{x(x-1)}\right)=\left|\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}=\frac{1}{x(x-1)},\ A=1, B=1.\right|=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)dx=-\ln|x|+\ln|x-1|=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|,$$

$$\int\frac{x(2x-1)}{x-1}e^{\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|}dx=\int\frac{x(2x-1)}{x-1}\left|\frac{x-1}{x}\right|dx=\pm\int(2x-1)dx=\pm\left(x^2-x\right),$$

мұндағы $\langle+\rangle$ және $\langle-\rangle$ таңбалары $\left|\frac{x-1}{x}\right|=\pm\frac{x-1}{x}$ теңдігінен шығады. Табылған интегралдарды (7) шешіміне қойсақ, берілген теңдеудің жалпы шешімін аламыз:

$$y=e^{-\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|}\left(\pm\left(x^2-x\right)+C\right)=\left|\frac{x}{x-1}\right|\left(\pm\left(x^{2-x}\right)+C\right)=\pm\frac{x}{x-1}\left(\pm x(x-1)+C\right)=x^2+\frac{Cx}{x-1}.$$

y(-2)=2 бастапқы шартын қанағаттандыратын дербес шешімі:

$$2=4-\frac{2C}{-2-1},\ C=-3,\ y=x^2-\frac{3x}{x-1}.\ ◀$$

Мысал 2. $y'(3x-y^2)=y$ теңдеуін шеш.

Шешуі. Бұл теңдеу y -ке қатысты сызықты емес. x -ті у тәуелсіз айнымалысына тәуелді функция ретінде қарастырсақ: $x'=\frac{1}{y'}$. Онда

$$\frac{1}{x'}(3x-y^2)=y\Rightarrow 3x-y^2=x'y\Rightarrow yx'-3x=-y^2\Rightarrow x'-\frac{3}{y}x=-y.$$

Бұл теңдеу x -ке қатысты сызықты $P(y)=-\frac{3}{y}, Q(y)=-y$.

(6)-дан,

$$x=e^{\int\frac{3dy}{y}}\cdot\left(C-\int y\cdot e^{-\int\frac{3dy}{y}}dy\right)=e^{3\ln y}\left(C-\int y\cdot e^{-3\ln y}dy\right)=$$

$$e^{3\ln y}\left(C-\int y\cdot e^{\ln y^{-3}}dy\right)=y^3\left(C-\int\frac{1}{y^2}dy\right)=y^3\left(C+\frac{1}{y}\right)$$

$x=Cy^3+y^2$ - жалпы шешім.

Сонымен қатар, (3) сызықты дифференциал теңдеуін *Бернулли әдісін* қолданып та, интегралдауға болады. Екі белгісіз функция *u(x), v(x)* енгіземіз және *y=u(x)v(x) (Бернулли ауыстыруы)* деп аламыз. Онда $y'=u'v+uv'$. y және y' өрнектерін (3) теңдеуіне қоя отырып, $u'v+uv'+P(x)uv=Q(x)$ немесе

$$(v'+P(x)v)u+u'v=Q(x). \qquad (6)$$

теңдеуін аламыз. Жақшаның ішіндегі өрнекті $v'+P(x)v=0$ десек, бұл айнымалысы ажыратылатын дифференциалдық теңдеу. Осы теңдеуді шешіп, *v*-ны табуға болады. Енді жақшаның ішіндегі өрнекті нөлге тең деп алғандықтан, (6) теңдеуі мына түрге келеді: $u+u'v=Q(x)$. Бұл теңдеуге жоғарыда табылған *v*-ны қойсақ, бұл да айнымалылары ажыратылатын теңдеу болады, бұл жерден *u*-ды табамыз. Табылған *u* мен *v*-ны Бернулли ауыстыруына қоятын болсақ, берілген теңдеудің жалпы шешімі шығады.

Мысал 3.

$$y'+ytgx=\frac{1}{\cos x}$$

дифференциалдық теңдеуін Бернулли әдісін қолданып шеш және бастапқы шарт $y(\pi) = 1$ болғандағы, Коши есебін шығар.

► Бернулли ауыстыруын жасаймыз: $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, онда:

$$u'v + uv' + uvtgx = \frac{1}{\cos x},\ (v' + vtgx)u + u'v = \frac{1}{\cos x}.$$

$v' + vtgx = 0$ теңдеуінің шешімін іздейміз.

$$dv + vtgxdx = 0,\ \frac{dv}{v} + vtgxdx = 0,$$

$$\int \frac{dv}{v} + \int tgxdx = 0, \qquad \ln|v| - \ln|\cos x| = \ln C_1.$$

$C_1 = 1$ деп, $v = \cos x$. шешімін табамыз. Енді $u'v = \frac{1}{cos\ x}$ теңдеуін шешеміз, мұндағы $v = cos\ x$. $u' = \frac{1}{\cos x}$, $u = \int \frac{1}{\cos x} + C = tgx + C$.

Онда берілген теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = uv = (tgx + C)\cos x.$$

Енді бастапқы шартқа сәйкес дербес шешім іздейміз: $y(\pi) = 1$, $1 = (0 + C)(-1)$, бұдан $C = -1$. Табылған С=-1 мәнін жалпы шешімге қойып, теңдеудің дербес шешімін аламыз: $y = (tgx - 1)\cos x = \sin x - \cos x$. ◄

Бернулли теңдеуі.

Анықтама 1.

$$y' + P(x)y = Q(x) \cdot y^{\alpha}$$

түріндегі дифференциалдық теңдеу Бернулли теңдеуі деп аталады, мұндағы $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$, $P(x)$, $Q(x)$ - қандай да бір кесіндіде үзіліссіз функциялар. Бұл теңдеу $u = y^{1-\alpha}$ айнымалысын ауыстыру көмегімен сызықты теңдеуге келтіріледі

Мысал 4. $y' + xy = -x \cdot y^2$ Бернулли теңдеуін сызықты теңдеуге келтір.

Шешуі:

$$\alpha = 2 \Rightarrow u = y^{1-\alpha} = \frac{1}{y} \Rightarrow u' = -\frac{1}{y^2}y' \Rightarrow y' = -y^2 \cdot u' \Rightarrow y' = -\frac{u'}{u^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{u'}{u^2} + \frac{x}{u} = -\frac{x}{u^2} \Rightarrow -u' + xu = -x \Rightarrow u' - xu = x.$$

Мысал 5. $y' + 2e^x y = 2e^x\sqrt{y}$ Бернулли теңдеуінің жалпы шешімін тап.

►Берілген теңдеудегі $\alpha = \frac{1}{2}$, сондықтан $z = y^{1-\alpha} = \sqrt{y}$ белгілеуін енгіземіз. $z' + e^x z = e^x$ теңдеуін аламыз, бұл сызықты теңдеу және оның жалпы шешімі:

$$z = e^{-\int e^x dx}\left(\int e^x e^{\int e^x dx} dx + C\right) = e^{-e^x}\left(\int e^x e^{e^x} dx + C\right) = e^{-e^x}\left(\int e^{e^x} de^x + C\right) =$$

$$= e^{-e^x}\left(e^{e^x} + C\right) = 1 + Ce^{-e^x}.$$

Онда берілген теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = z^2 = \left(1 + Ce^{-e^x}\right)^2. \qquad ◄$$

Мысал 6. $xy' + y = xy^2 \ln x$ теңдеуінің жалпы шешімін тап.

►Берілген теңдеудің екі жағын да $x \neq 0$ айнымалысына бөліп, Бернулли теңдеуін алуға болады, мұндағы $\alpha = 2$. Ал біз бұл теңдеуді Бернулли ауыстыруы әдісімен шығаралық $(y = uv,\ y' = u'v + uv')$:

$$x(u'v + uv') + uv = x(uv)^2 \ln x.$$

$xv' + v = 0$ теңдеуінен, $v = x^{-1}$ аламыз. Енді $xvu' = xu^2 v \ln x$ теңдеуінің жалпы шешімін табу қажет, мұндағы $v = x^{-1}$. Онда $u' = u^2 \frac{\ln x}{x}$ теңдеуін аламыз. Айнымалыларды ажыратып, интегралдасақ:

$$\frac{du}{u^2} = \ln x \frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{du}{u^2} = \int \ln x \frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{u} = \frac{\ln^2 x}{2} + \frac{C}{2}, \qquad u = -\frac{2}{C + \ln^2 x}.$$

Сонымен, берілген теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = uv = -\frac{2}{x\left(C + \ln^2 x\right)}.$$ ◄

Толық дифференциалды теңдеулер.

Анықтама 2.

$$M(x,y)dx + N(x,y) = 0 \qquad (1)$$

түріндегі дифференциалдық теңдеу толық дифференциалды теңдеу деп аталады, егер толық дифференциалы қандай да бір облыста теңдеудің сол жағындағы өрнекке тең болатын $u(x;y)$ функциясы табылса.

Сонымен,

$$Mdx + Ndy \equiv du(x) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0 \qquad (2)$$

Теорема 1. $M(x;y)$, $N(x;y)$ үзіліссіз және дифференциалданатын функция және $\frac{\partial M}{\partial y}$ пен $\frac{\partial N}{\partial x}$ қандай да бір облыста үзіліссіз болсын. (1) теңдеуі толық дифференциалды теңдеу болуы үшін:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (3)$$

шарты орындалуы қажетті және жеткілікті. Және жалпы интеграл мына түрде жазылады:

$$\int_{x_0}^{x} M(x;y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0;y)dy = C, \qquad (4)$$

немесе:

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy = C, \qquad (5)$$

мұндағы $M_0(x_0, y_0) \in D$.

Мысал 7. $(3x^3 + 6xy^2)dx + (6x^2 y + 4y^3)dy = 0$ теңдеуін шеш.

Шешуі:

$M = 3x^3 + 6xy^2, N = 6x^2 y + 4y^3$ және $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 12xy$ болғандықтан, бұл толық дифференциалды теңдеу. $(x_0; y_0) = (0;0)$ болсын. Онда

$$\int_0^x (3x^2 + 6xy^2)dx + \int_0^y 4y^3 dy = \left[x^3 + 3x^2y^2\right]\Big|_0^x + y^4\Big|_0^y \Rightarrow x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$$ - жалпы интеграл.

Мысал 8. $\left(x^2 + y - 4\right)dx + \left(x + y + e^x\right)dy = 0$ теңдеудің жалпы интегралын тап.

► $P = x^2 + y - 4,\quad Q = x + y + e^y$ белгілеуін енгіземіз. $\frac{\partial P}{\partial y} = 1,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, яғни, (3) шарты орындалады, берілген теңдеу толық дифференциалды теңдеу. Оның жалпы интегралын (4) немесе (5) түрінде іздейміз, қарапайымдылық үшін $x_0 = 0,\ y_0 = 0$ деп аламыз. $x_0,\ y_0$-дің бұл мәндерін таңдап алуымыз дұрыс, себебі $P(x, y),\ Q(x, y)$ функциялары мен оның дербес туындылары осы нүктеде анықталған, яғни, $M_0(0,0) \in D$. (4) формуласынан:

$$\int_0^x \left(x^2 + 0 - 4\right)dx + \int_0^y \left(x + y + e^y\right)dy = C,$$

$$\frac{x^3}{3} - 4x + xy + \frac{y^2}{2} + e^y - 1 = C,$$

ал (5) формуласынан:

$$\int_0^x \left(x^2 + y - 4\right)dx + \int_0^y \left(0 + y + e^y\right)dy = C,$$

$$\frac{x^3}{3} + xy - 4x + \frac{y^2}{2} + e^y - 1 = C$$

шығады, бұл (4) формуласынан табылған жалпы интегралмен беттеседі.◄